

EEIGM  
1<sup>ère</sup> Année

Discipline Mécanique

Résistance des Matériaux

TD 9 :  
**Flexion dans le cadre de Navier Bernoulli**  
**Détermination de la déformée de la ligne moyenne**

$$EI_{GZ} \frac{d^2v}{dx^2} = M_z(x)$$

**Evolution de la contrainte normale dans une section droite**

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_z}{I_{GZ}} \cdot y$$

**Zoubir AYADI**

### Exercice 1

Soit  $(A; \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)$  un repère orthonormé direct de référence.

On considère une poutre de longueur  $2L$  et de section droite de forme rectangulaire de largeur  $b$  et de hauteur  $h$ .

Cette poutre est chargée au point C avec une force concentrée et a les liaisons suivantes :

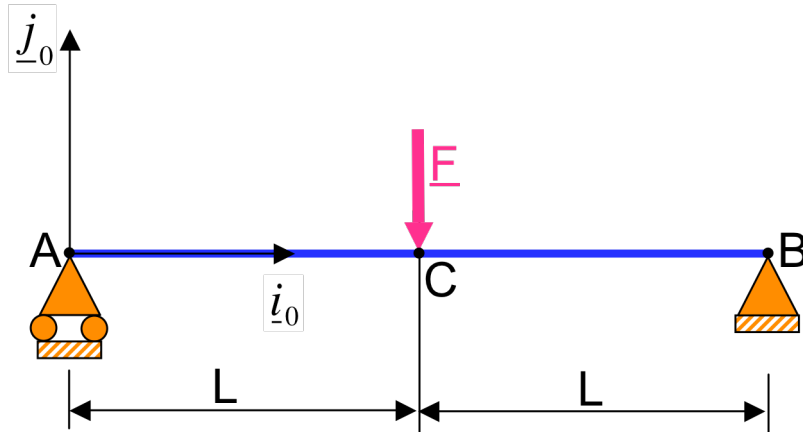
une articulation au point B ;

un appui simple au point A.

Pour l'application numérique, on donne :

$$2L=1\text{m}$$

$$F=1000\text{N}$$



*Remarque : le plan  $(\underline{i}_0, \underline{j}_0)$  est un plan de symétrie qui contient la ligne moyenne. C'est un plan moyen pour la poutre.*

## I. DETERMINATION DES EFFORTS EXTERIEURS

### 1. Chargement (donnée du problème)

Un seul chargement du type **force concentrée** est appliqué au point C. Le torseur associé à ce chargement est :

$$\tau_C = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_C) = \begin{vmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_C, C) = \underline{0} \end{array} \right\}_{(A; \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

Il est intéressant à ce stade de penser à exprimer ce torseur en un point où l'on souhaite appliquer le principe fondamental de la statique. Nous choisissons par exemple le point A. Le torseur de chargement au point C s'exprime au point de réduction A de la façon suivante :

$$\tau_C = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_C) = \begin{vmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_C, A) = \underline{M}(\tau_C, C) + \underline{AC} \wedge \underline{R}(\tau_C) \end{array} \right\}_{(A; \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

$$\tau_C = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_C) = \begin{vmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_C, A) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -LF \end{vmatrix} \end{array} \right\}_{(A:i_0, j_0, k_0)}$$

## 2. Réactions des liaisons (inconnues du problème)

➤ Torseur des efforts extérieurs associé à la liaison **appui simple au point A**

Cette liaison **supprime 1 degré de liberté de translation** selon  $\underline{j}_0$ , elle **introduit** donc **1 inconnue en force** selon  $\underline{j}_0$ . Le torseur associé à cette liaison au point de réduction A est le suivant :

$$\tau_A = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_A) = \begin{vmatrix} 0 \\ Y_A \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_A, A) = \underline{0} \end{array} \right\}_{(A:i_0, j_0, k_0)}$$

➤ Torseur des efforts extérieurs associé à la liaison **articulation au point B**

Cette liaison **supprime 2 degrés de liberté de translation** selon  $\underline{i}_0$  et  $\underline{j}_0$ , elle **introduit** donc **2 inconnues en force** selon ces **2 directions**. Le torseur associé à cette liaison au point de réduction B est le suivant :

$$\tau_B = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_B) = \begin{vmatrix} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_B, B) = \underline{0} \end{array} \right\}_{(A:i_0, j_0, k_0)}$$

Le torseur de la liaison articulation au point B s'exprime au point de réduction A de la façon suivante :

$$\tau_B = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_B) = \begin{vmatrix} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_B, A) = \underline{M}(\tau_B, B) + \underline{AB} \wedge \underline{R}(\tau_B) \end{array} \right\}_{(A:i_0, j_0, k_0)}$$

$$\tau_B = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_B) = \begin{vmatrix} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_B, A) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2LY_B \end{vmatrix} \end{array} \right\}_{(A:i_0, j_0, k_0)}$$

### 3. Application du principe fondamental de la statique et détermination des réactions des liaisons

Remarque : Il faut d'abord exprimer tous les torseurs en un même point de réduction. Ce travail a été fait précédemment.

$$\{\tau_{\text{efforts extérieurs}}\} = \{0\}$$

$$\tau_A + \tau_B + \tau_C = \{0\} \Rightarrow \begin{cases} \underline{R}(\tau_A) + \underline{R}(\tau_B) + \underline{R}(\tau_C) = \underline{0} \\ \underline{M}(\tau_A, A) + \underline{M}(\tau_B, A) + \underline{M}(\tau_C, A) = \underline{0} \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

La projection des équations (1) et (2) selon les 3 axes du repère de référence conduit à 3 équations scalaires « utiles » (2 équations en force selon  $\underline{j}_0$  et selon  $\underline{j}_0$  et 1 équation en moment selon  $\underline{k}_0$ ). On obtient alors :

$$\begin{cases} X_B = 0 \\ Y_A + Y_B = F \\ 2LY_B - LF = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X_B = 0 \\ Y_A + Y_B = F \\ Y_B = \frac{F}{2} \end{cases}$$

Ce qui conduit à :

$$\tau_A = \left\{ \begin{array}{c|c} \underline{R}(\tau_A) = \begin{vmatrix} 0 \\ F/2 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_A, A) = \underline{0} \end{array} \right\}_{(A; \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

$$\tau_B = \left\{ \begin{array}{c|c} \underline{R}(\tau_B) = \begin{vmatrix} 0 \\ F/2 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_B, B) = \underline{0} \end{array} \right\}_{(A; \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

Application numérique :

Les réactions des liaisons :

$$\tau_A = \left\{ \begin{array}{c|c} \underline{R}(\tau_A) = \begin{vmatrix} 0 \\ 500 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ en N} \\ \underline{M}(\tau_A, A) = \underline{0} \text{ en N.m} \end{array} \right\}_{(A; \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

$$\text{et } \tau_B = \left\{ \begin{array}{c|c} \underline{R}(\tau_B) = \begin{vmatrix} 0 \\ 500 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ en N} \\ \underline{M}(\tau_B, B) = \underline{0} \text{ en N.m} \end{array} \right\}_{(A; \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

Le chargement :

$$\tau_C = \left\{ \begin{array}{c|c} \underline{R}(\tau_C) = \begin{vmatrix} 0 \\ -1000 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ en N} \\ \underline{M}(\tau_C, C) = \underline{0} \text{ en N.m} \end{array} \right\}_{(A; \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

### 4. Isostaticité extérieure

Le système est isostatique extérieurement car nous avons déterminé toutes les réactions des liaisons par les seules équations d'équilibre. Soient : 3 équations pour 3 inconnue.

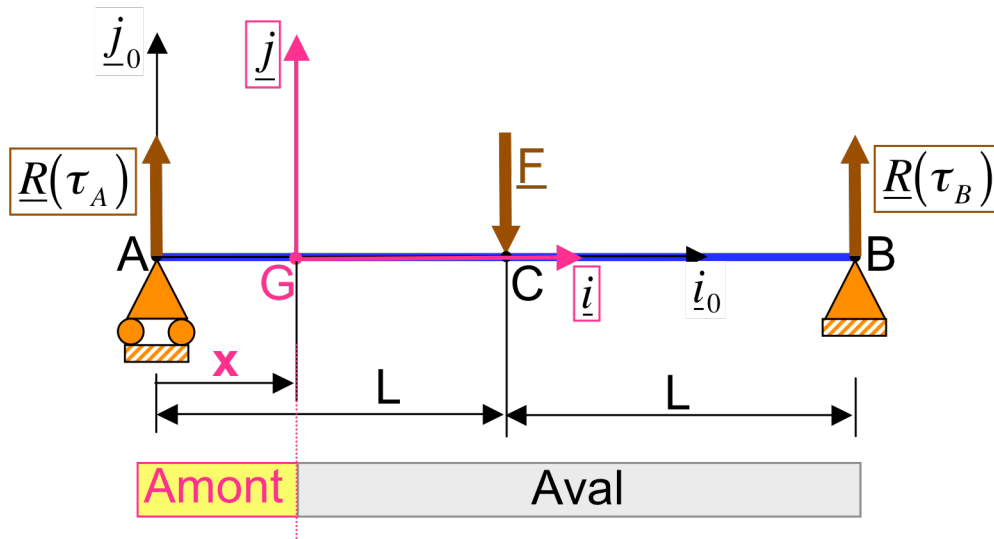
## II. DETERMINATION DES EFFORTS INTERIEURS

Deux coupes fictives seront nécessaires pour déterminer les deux expressions des torseurs des efforts intérieurs : une coupe entre les points A et C et une entre coupe entre les points C et B.

*Attention, les efforts intérieurs n'ont de sens que s'ils sont exprimés dans le repère local. Il est parfois pratique d'effectuer les calculs dans le repère de référence mais pour identifier les efforts intérieurs, il faut passer au repère local.*

### 1. pour l'intervalle [A,C]

$$0 \leq x \leq L$$



On a :

$$\tau_i = -\tau_{\text{amont}} = +\tau_{\text{aval}}$$

On peut choisir la partie amont. Dans ce cas, le torseur des efforts intérieurs est donné par :

$$\tau_i = -\tau_{\text{amont}} = -\tau_A$$

$$R(\tau_i) = -R(\tau_A)$$

$$R(\tau_i) = - \begin{vmatrix} 0 \\ F/2 \\ 0 \end{vmatrix}_{(G;\underline{i},\underline{j},\underline{k})}$$

$$\underline{M}(\tau_i, G) = -[\underline{M}(\tau_A, A) + \underline{GA} \wedge R(\tau_A)]$$

$$\underline{M}(\tau_i, G) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ Fx/2 \end{vmatrix}_{(G;\underline{i},\underline{j},\underline{k})}$$

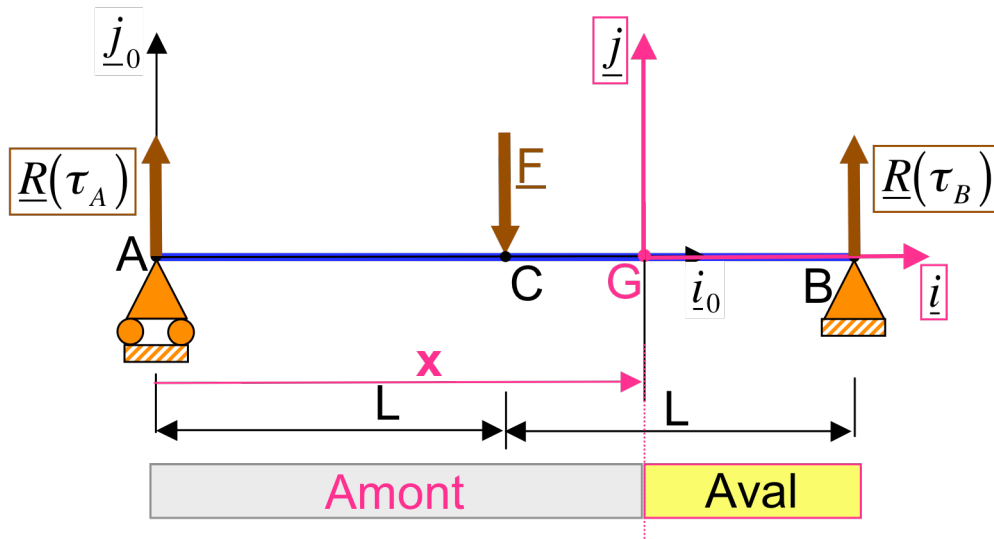
$$\tau_i = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_i) = \begin{vmatrix} 0 = N : \text{effort normal} \\ -F/2 = T_y : \text{effort tranchant selon } \underline{j} \\ 0 = T_z : \text{effort tranchant selon } \underline{k} \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_i, G) = \begin{vmatrix} 0 = M_x : \text{moment de torsion} \\ 0 = M_y : \text{moment de flexion selon } \underline{j} \\ Fx/2 = M_z : \text{moment de flexion selon } \underline{k} \end{vmatrix} \end{array} \right\}_{(G; \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})}$$

Dans cet intervalle, la poutre est soumise à une **sollicitation de flexion simple** (1 effort tranchant + 1 moment fléchissant).

On peut remarquer que l'équation d'équilibre est vérifiée :  $\frac{dM_z}{dx} + T_y = 0$

## 2. pour l'intervalle [C,B]

$$L \leq x \leq 2L$$



On a :

$$\tau_i = -\tau_{\text{amont}} = +\tau_{\text{aval}}$$

On peut choisir la partie aval. Dans ce cas, le torseur des efforts intérieurs est donné par :

$$\tau_i = \tau_{\text{aval}} = \tau_B$$

$$\underline{R}(\tau_i) = \underline{R}(\tau_B)$$

$$\underline{R}(\tau_i) = \begin{vmatrix} 0 \\ F/2 \\ 0 \end{vmatrix}_{(G; \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})}$$

$$\underline{M}(\tau_i, G) = [\underline{M}(\tau_B, B) + \underline{GB} \wedge \underline{R}(\tau_B)]$$

$$\underline{M}(\tau_i, G) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ F(2L-x)/2 \end{vmatrix}_{(G; \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})}$$

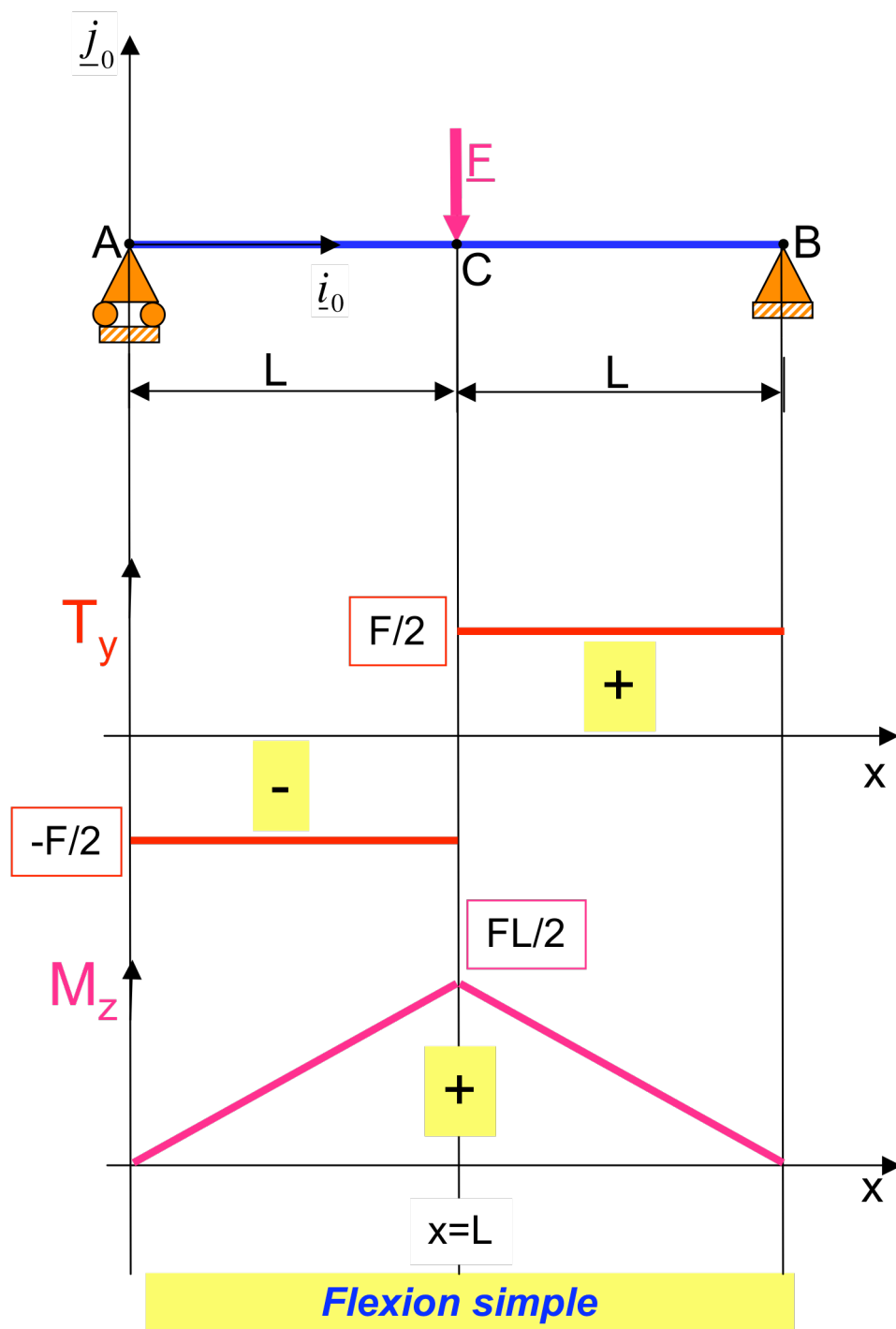
$$\tau_i = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_i) = \begin{vmatrix} 0 = N : \text{effort normal} \\ F/2 = T_y : \text{effort tranchant selon } \underline{j} \\ 0 = T_z : \text{effort tranchant selon } \underline{k} \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_i, G) = \begin{vmatrix} 0 = M_x : \text{moment de torsion} \\ 0 = M_y : \text{moment de flexion selon } \underline{j} \\ F(2L-x)/2 = M_z : \text{moment de flexion selon } \underline{k} \end{vmatrix} \end{array} \right\}_{(G; \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})}$$

Dans cet intervalle, la poutre est soumise à une **sollicitation de flexion simple** (1 effort tranchant + 1 moment fléchissant).

On peut remarquer que l'équation d'équilibre est vérifiée :  $\frac{dM_z}{dx} + T_y = 0$

Au passage d'une charge concentrée, les efforts intérieurs sont discontinus.

### 3. Diagramme des efforts intérieurs





### III. DETERMINATION DE LA DEFORMEE

On se place donc dans le cadre de la théorie de Navier Bernouilli pour les matériaux homogènes. On est aussi dans le cas d'une poutre à plan moyen chargée dans ce plan. On ne prend en compte que la contribution du moment fléchissant dans le calcul de la déformée.

L'équation de ligne moyenne déformée est obtenue en intégrant l'équation suivante :

$$EI_{GZ} \frac{d^2 v}{dx^2} = M_z(x)$$

#### 1. pour l'intervalle [A,C]

$$0 \leq x \leq L$$

$$EI_{GZ} \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = M_z(x) = \frac{Fx}{2}$$

$$EI_{GZ} \frac{dv(x)}{dx} = \frac{Fx^2}{4} + C_1 \text{ où } C_1 \text{ est une constante d'intégration}$$

$$EI_{GZ} v(x) = \frac{Fx^3}{12} + C_1 x + C_2 \text{ où } C_2 \text{ est une constante d'intégration}$$

Pour déterminer les constantes  $C_1$  et  $C_2$ , on écrit la condition au limite en A (1<sup>ère</sup> équation) et on exploite la symétrie au point C (2<sup>ème</sup> équation) :

Au point A, on a une articulation  $\rightarrow$

$$\text{Le déplacement selon } j \text{ est nul} \rightarrow v(x=0) = 0 \text{ soit } C_2 = 0$$

Au point C, pour des raisons de symétrie, on peut écrire (pente horizontale) :

$$\frac{dv(x=L)}{dx} = 0 \text{ soit } C_1 = -\frac{FL^2}{4}$$

En remplaçant les constantes par leurs expressions, l'équation de ligne moyenne déformée pour l'intervalle [A,C] devient :

$$v(x) = \frac{Fx}{12EI_{GZ}} [x^2 - 3L^2]$$

où

$v$  est la composante du déplacement selon l'axe  $j$ , (en m dans le SI)

$F$  est la force ponctuelle appliquée (en N dans le SI)

$I_{GZ}$  est le moment quadratique par rapport à l'axe (GZ), (en m<sup>4</sup> dans le SI)

$x$  est l'abscisse du centre d'une section droite quelconque appartenant à l'intervalle [0,L], (en m dans le SI)

#### 2. pour l'intervalle [C,B]

$$L \leq x \leq 2L$$

$$EI_{GZ} \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = M_z(x) = \frac{F(2L - x)}{2}$$

$$EI_{GZ} \frac{dv(x)}{dx} = \frac{Fx}{2} \left( 2L - \frac{x}{2} \right) + C_3, \text{ où } C_3 \text{ est une constante d'intégration}$$

$$EI_{GZ} v(x) = \frac{Fx^2}{2} \left( L - \frac{x}{6} \right) + C_3 x + C_4, \text{ où } C_4 \text{ est une constante d'intégration}$$

Pour déterminer les constantes d'intégration  $C_3$  et  $C_4$ , on exploite la symétrie et l'on écrit la condition au limite au point B.

Au point C, pour des raisons de symétrie, on a :

$$\frac{dv(x=L)}{dx} = 0$$

soit

$$EI_{GZ} \frac{dv(x=L)}{dx} = \frac{FL}{2} \left( 2L - \frac{L}{2} \right) + C_3$$

d'où

$$C_3 = \frac{-3FL^2}{4}$$

Au point B, on a un appui simple, donc le degrés de liberté de translation dans la direction  $j$  est supprimé. Cela se traduit par :

$$v(x=2L) = 0$$

soit

$$0 = \frac{F(2L)^2}{2} \left( L - \frac{2L}{6} \right) + C_3 2L + C_4$$

d'où

$$C_4 = \frac{FL^3}{6}$$

En remplaçant les constantes par leurs expressions, l'équation de ligne moyenne déformée pour l'intervalle [C,B] devient :

$$v(x) = \frac{F}{12EI_{GZ}} \left[ x^2(6L - x) + \frac{L^2}{2}(4L - 18x) \right]$$

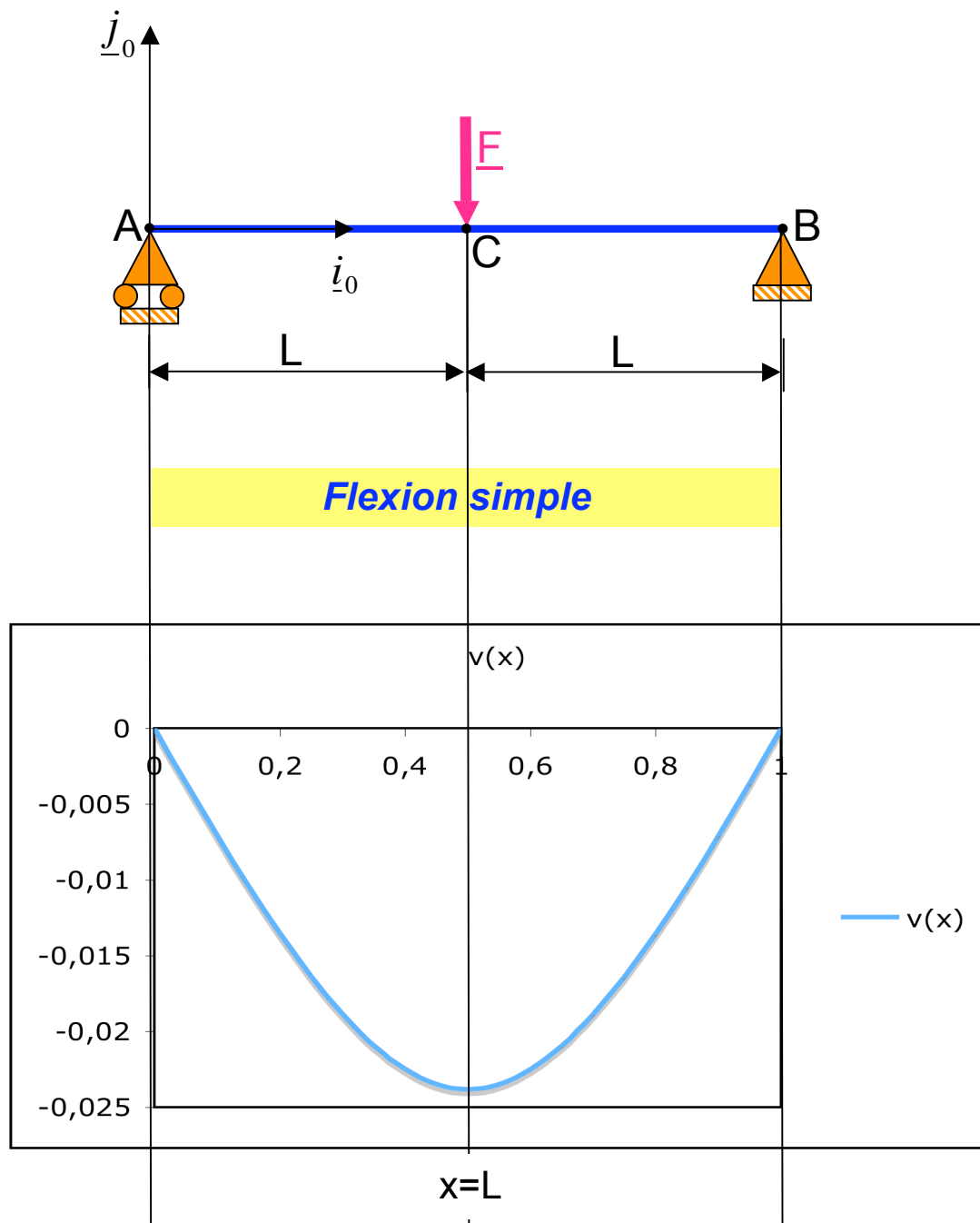
#### Remarque :

Si on voulait déterminer les constantes (4 pour les deux intervalles) uniquement par les conditions aux limites (sans prendre en compte la symétrie), on doit écrire en plus

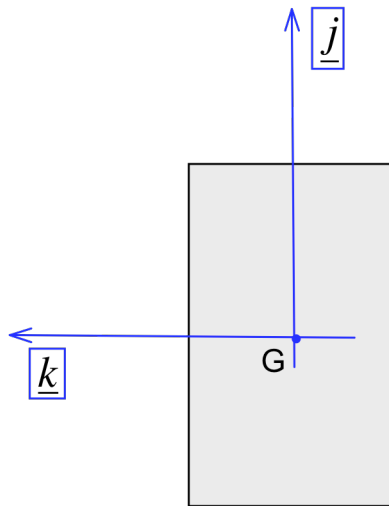
La continuité du déplacement :  $\boxed{[v(x = L)]_{(A,C)} = [v(x = L)]_{(C,B)}}$

Et la continuité de la rotation :  $\boxed{\left[\frac{dv(x = L)}{dx}\right]_{(A,C)} = \left[\frac{dv(x = L)}{dx}\right]_{(C,B)}}$

### Évolution de la ligne moyenne déformée



#### IV. CONTRAINTE NORMALE DANS LA SECTION DROITE

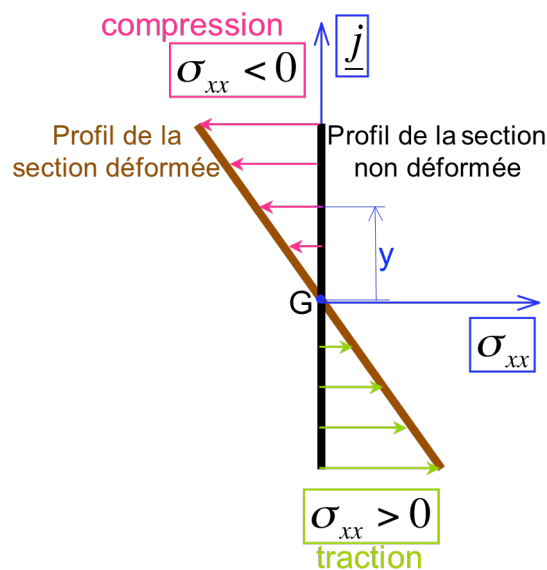


*Section droite*

Cette évolution est donnée par la relation :

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_z}{I_{GZ}} \cdot y$$

Dans l'intervalle [A,B], le moment fléchissant est positif et l'évolution est la suivante :



*Profil de la contrainte normale dans la section droite*

##### **Remarque :**

La contrainte normale due au moment fléchissant est maximale sur la fibre la plus éloignée du centre de la section. Cette contrainte est nulle sur la fibre située au point G (fibre neutre).

Pour une valeur donnée du moment fléchissant (correspondant à une valeur donnée de  $x$ ) et pour une fibre donnée, plus le moment quadratique est grand, plus la contrainte dans cette fibre est faible. Le choix de la section droite est donc d'une grande importance.

## Exercice 2

Mêmes questions que pour l'exercice 1

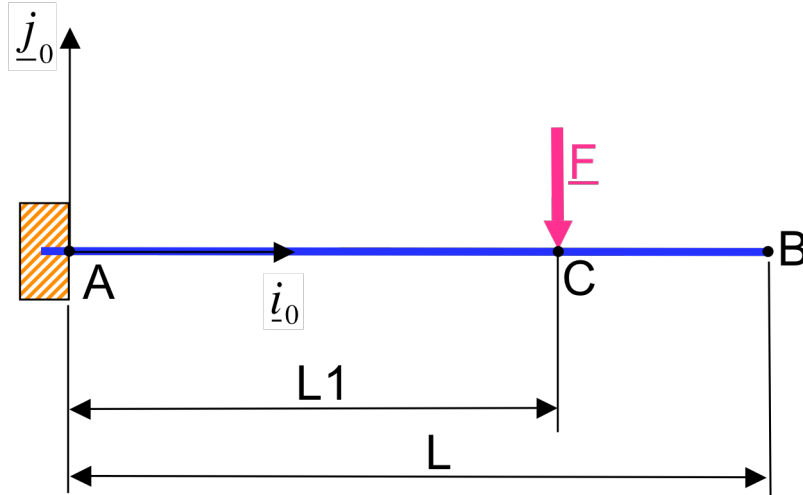
Avec une liaison encastrement au point A.

Pour l'application numérique, on donne :

$L=3\text{m}$

$L1=2$

$F=2000\text{N}$



Remarque : le plan  $(\underline{i}_0, \underline{j}_0)$  est un plan de symétrie qui contient la ligne moyenne. C'est un plan moyen pour la poutre.

## DETERMINATION DES EFFORTS EXTERIEURS

### 1. Chargement (donnée du problème)

Un seul chargement du type **force concentrée** est appliqué au point C. Le torseur associé à ce chargement est :

$$\tau_C = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_C) = \begin{vmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_C, C) = \underline{0} \end{array} \right\}_{(A:\underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

Il est intéressant à ce stade de penser à exprimer ce torseur en un point où l'on souhaite appliquer le principe fondamental de la statique. Nous choisissons par exemple le point A. Le torseur de chargement au point C s'exprime au point de réduction A de la façon suivante :

$$\tau_C = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_C) = \begin{vmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_C, A) = \underline{M}(\tau_C, C) + \underline{AC} \wedge \underline{R}(\tau_C) \end{array} \right\}_{(A:\underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

$$\tau_C = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_C) = \begin{vmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_C, A) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1 F \end{vmatrix} \end{array} \right\}_{(A; \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

## 2. Réactions des liaisons (inconnues du problème)

➤ Torseur des efforts extérieurs associé à la liaison **encastrement au point A**

Cette liaison **supprime les 6 degrés de liberté dans l'espace** (les 3 translations et les 3 rotations). Elle introduit donc **6 inconnues (3 forces et 3 moments)**. Dans le cas d'une **poutre à plan moyen chargée dans son plan**, le torseur associé à cette liaison au point de réduction A est:

$$\tau_A = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_A) = \begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_A, A) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ Z_A \end{vmatrix} \end{array} \right\}_{(A; \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

## 3. Application du principe fondamental de la statique et détermination des réactions des liaisons

**Remarque :** Il faut d'abord exprimer tous les torseurs en un même point de réduction. Ce travail a été fait précédemment.

$$\{\tau_{\text{efforts extérieurs}}\} = \{0\}$$

$$\tau_A + \tau_C = \{0\} \Rightarrow \begin{cases} \underline{R}(\tau_A) + \underline{R}(\tau_C) = \underline{0} & (1) \\ \underline{M}(\tau_A, A) + \underline{M}(\tau_C, A) = \underline{0} & (2) \end{cases}$$

La projection des équations (1) et (2) selon les 3 axes du repère de référence conduit à 3 équations scalaires « utiles » (2 équations en force selon  $\underline{j}_0$  et selon  $\underline{j}_0$  et 1 équation en moment selon  $\underline{k}_0$ ). On obtient alors :

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A = F \\ Z_B = L_1 F \end{cases}$$

Ce qui conduit à :

$$\tau_A = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_A) = \begin{vmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_A, A) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 F \end{vmatrix} \end{array} \right\}_{(A; \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

Application numérique :

Les réactions des liaisons :

$$\tau_A = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_A) = \begin{vmatrix} 0 \\ 2000 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ en N} \\ \underline{M}(\tau_A, A) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 4000 \end{vmatrix} \text{ en N.m} \end{array} \right\}_{(A; \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

Le chargement :

$$\tau_C = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_C) = \begin{vmatrix} 0 \\ -2000 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ en N} \\ \underline{M}(\tau_C, C) = \underline{0} \text{ en N.m} \end{array} \right\}_{(A; \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

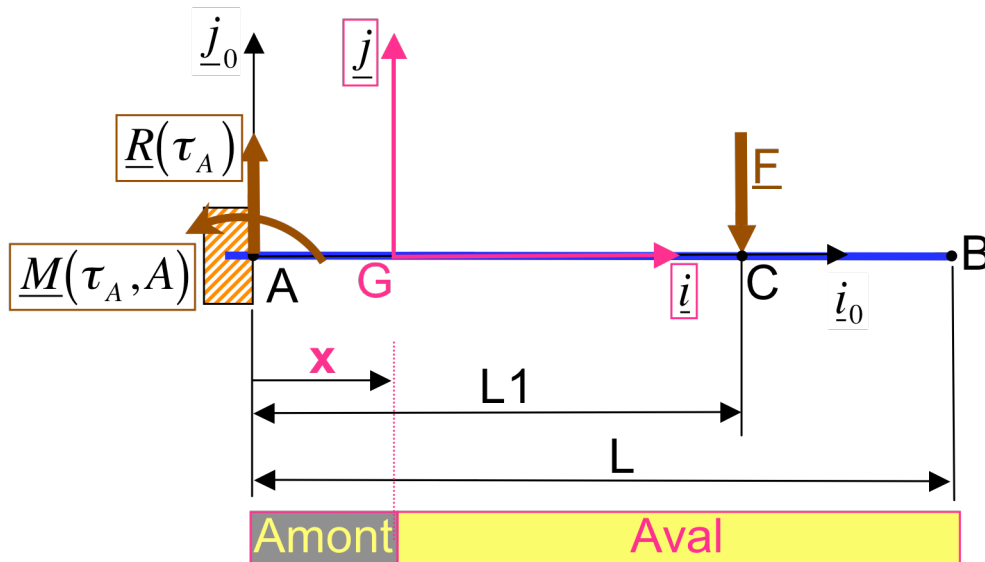
#### 4. Isostaticité extérieure

Le **système est isostatique** extérieurement car nous avons déterminé toutes les réactions (3 inconnues) des liaisons par les seules équations d'équilibre (3 équations scalaires). Soient : 3 équations pour 3 inconnue.

## II. DETERMINATION DES EFFORTS INTERIEURS

Deux coupes fictives seront nécessaires pour déterminer les deux expressions des torseurs des efforts intérieurs : une coupe entre les points A et C et une entre coupe entre les points C et B.

### 1. pour l'intervalle [A,C]



$$\tau_i = -\tau_{\text{amont}} = +\tau_{\text{aval}}$$

On peut choisir la partie aval, les calculs sont « plus simples » avec le signe « plus »

*Attention, si on prend la partie amont, il ne faut pas oublier de prendre en compte aussi le moment d'encastrement puisqu'il fait partie des éléments de réduction du torseur amont.*

$$\tau_i = +\tau_{\text{aval}} = \tau_C$$

$$\underline{R}(\tau_i) = \underline{R}(\tau_C)$$

$$\underline{R}(\tau_i) = \begin{vmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{vmatrix}_{(G; \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})}$$

$$\underline{M}(\tau_i, G) = [\underline{M}(\tau_C, C) + \underline{GC} \wedge \underline{R}(\tau_C)]$$

$$\underline{M}(\tau_i, G) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -F(L_1 - x) \end{vmatrix}_{(G; \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})}$$



$$\tau_i = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_i) = \begin{vmatrix} 0 \\ -F = T_y : \text{effort tranchant selon } \underline{j} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_i, G) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -F(L_1 - x) = M_z : \text{moment de flexion selon } \underline{k} \end{vmatrix} \end{array} \right\}_{(G; \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})}$$

Dans cet intervalle, la poutre est soumise à une **sollicitation de flexion simple** (1 effort tranchant + 1 moment fléchissant).

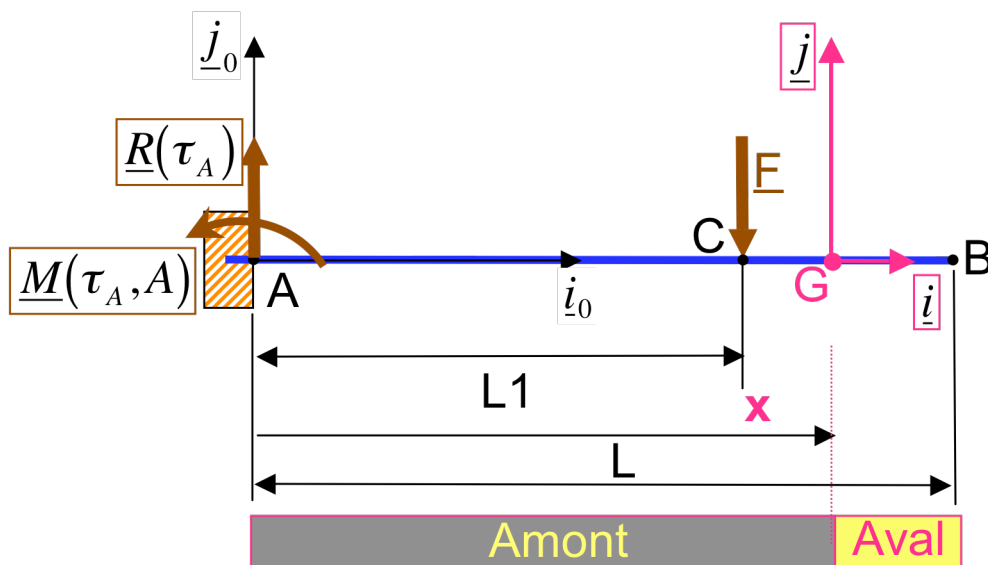
On peut remarquer que l'équation d'équilibre :

$$\frac{dM_z}{dx} + T_y = 0 \text{ est vérifiée.}$$

En effet,

$$\frac{d(-F(L_1 - x))}{dx} - F = +F - F = 0$$

## 2. pour l'intervalle [C,B]

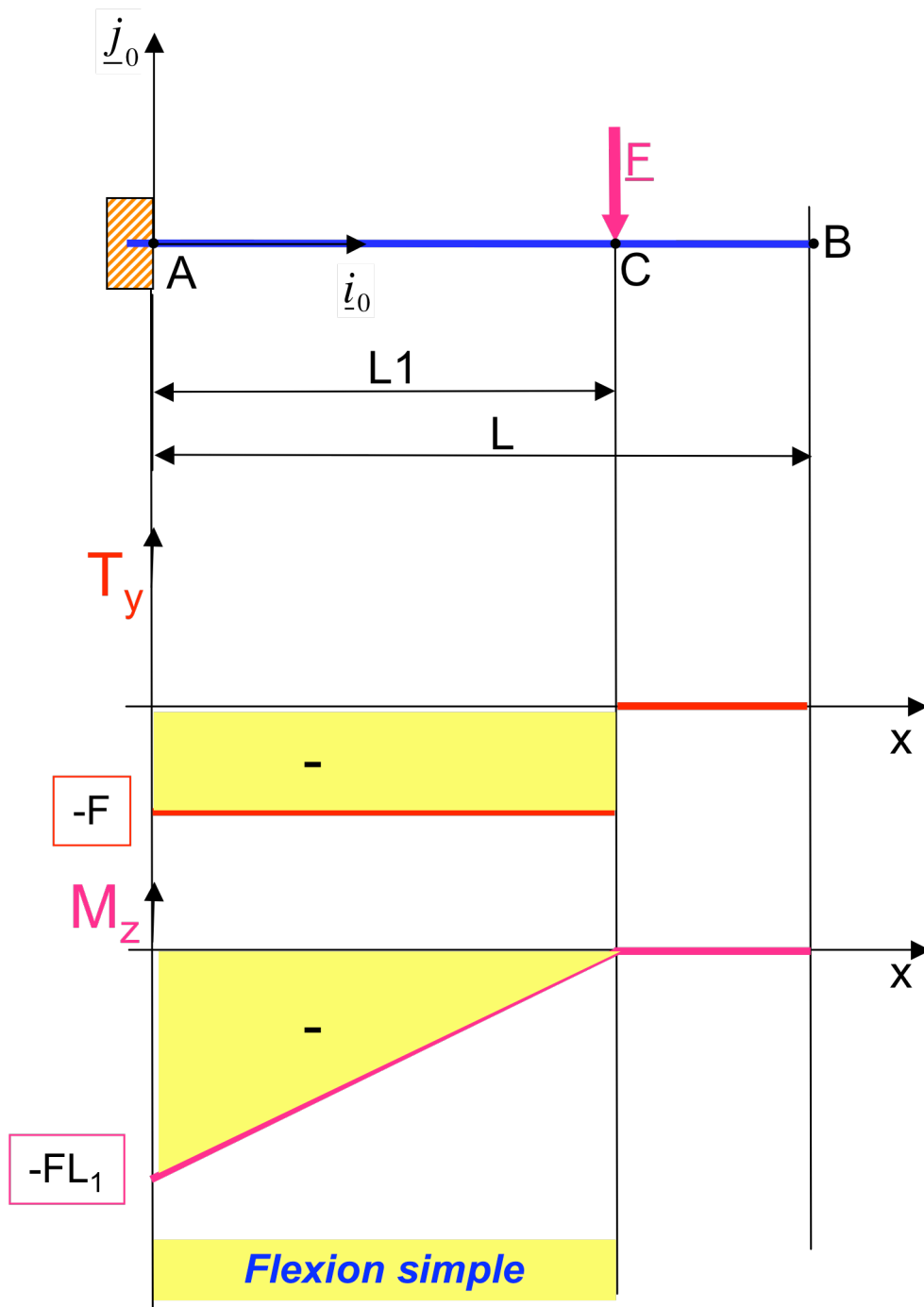


$$\tau_i = -\tau_{\text{amont}} = +\tau_{\text{aval}} = \{0\}$$

$$\tau_i = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_i) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_i, G) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \end{array} \right\}_{(G; \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})}$$

Le poids de la poutre est négligé et il n'y a aucune action extérieure exercée sur la partie GB, le torseur des efforts intérieurs est donc réduit au torseur nul.

### 3. Diagramme des efforts intérieurs



### III. DETERMINATION DE LA DEFORMEE

L'équation de ligne moyenne déformée est obtenue en intégrant l'équation suivante :

$$EI_{GZ} \frac{d^2 v}{dx^2} = M_z(x)$$

#### 1. pour l'intervalle [A,C]

$$EI_{GZ} \frac{d^2 v}{dx^2} = -F(L_1 - x)$$

On intègre une première fois,

$$EI_{GZ} \frac{dv}{dx} = -Fx \left( L_1 - \frac{x}{2} \right) + C_1$$

puis une deuxième fois,

$$EI_{GZ} v(x) = -Fx^2 \left( \frac{L_1}{2} - \frac{x}{6} \right) + C_1 x + C_2$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes,

Nous écrivons les conditions aux limites au point A pour les déterminer. En effet, en A la liaison est un encastrement. Cette dernière supprime les 6 degrés de liberté (3 translations et 3 rotations) dans l'espace. En particulier, le déplacement selon  $\underline{j}$  ainsi que la rotation selon  $\underline{k}$  sont supprimés. Nous traduisons donc ces deux dernières informations en équations :

$$\text{En A le déplacement selon } \underline{j} \text{ est nul} \Rightarrow v(x=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\text{En A la rotation autour de } \underline{k} \text{ est nulle} \Rightarrow \frac{dv(x=0)}{dx} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

L'équation de la ligne moyenne déformée pour l'intervalle [A,C] est :

$$v(x) = \frac{-Fx^2}{6EI_{GZ}} (3L_1 - x) \text{ en m dans le SI}$$

#### 2. pour l'intervalle [C,B]

Le moment fléchissant est nul dans cet intervalle, on écrit :

$$EI_{GZ} \frac{d^2 v}{dx^2} = 0$$

On intègre une première fois,

$$EI_{GZ} \frac{dv}{dx} = C_3$$

puis une deuxième fois,

$$EI_{GZ} v(x) = C_3 x + C_4$$

où  $C_3$  et  $C_4$  sont des constantes, pour le déterminer, nous écrivons la continuité du déplacement et de la rotation au point C (soient, mathématiquement, deux équations pour déterminer deux inconnues).

En C, la continuité du déplacement conduit à :

$$\left[ v(x = L_1) \right]_{(A,C)} = \left[ v(x = L_1) \right]_{(C,B)}$$

En C, la continuité de la rotation conduit à :

$$\left[ \frac{d v(x = L_1)}{dx} \right]_{(A,C)} = \left[ \frac{d v(x = L_1)}{dx} \right]_{(C,B)}$$

On détermine alors les constantes :

$$C_3 = -\frac{FL^2}{2}$$

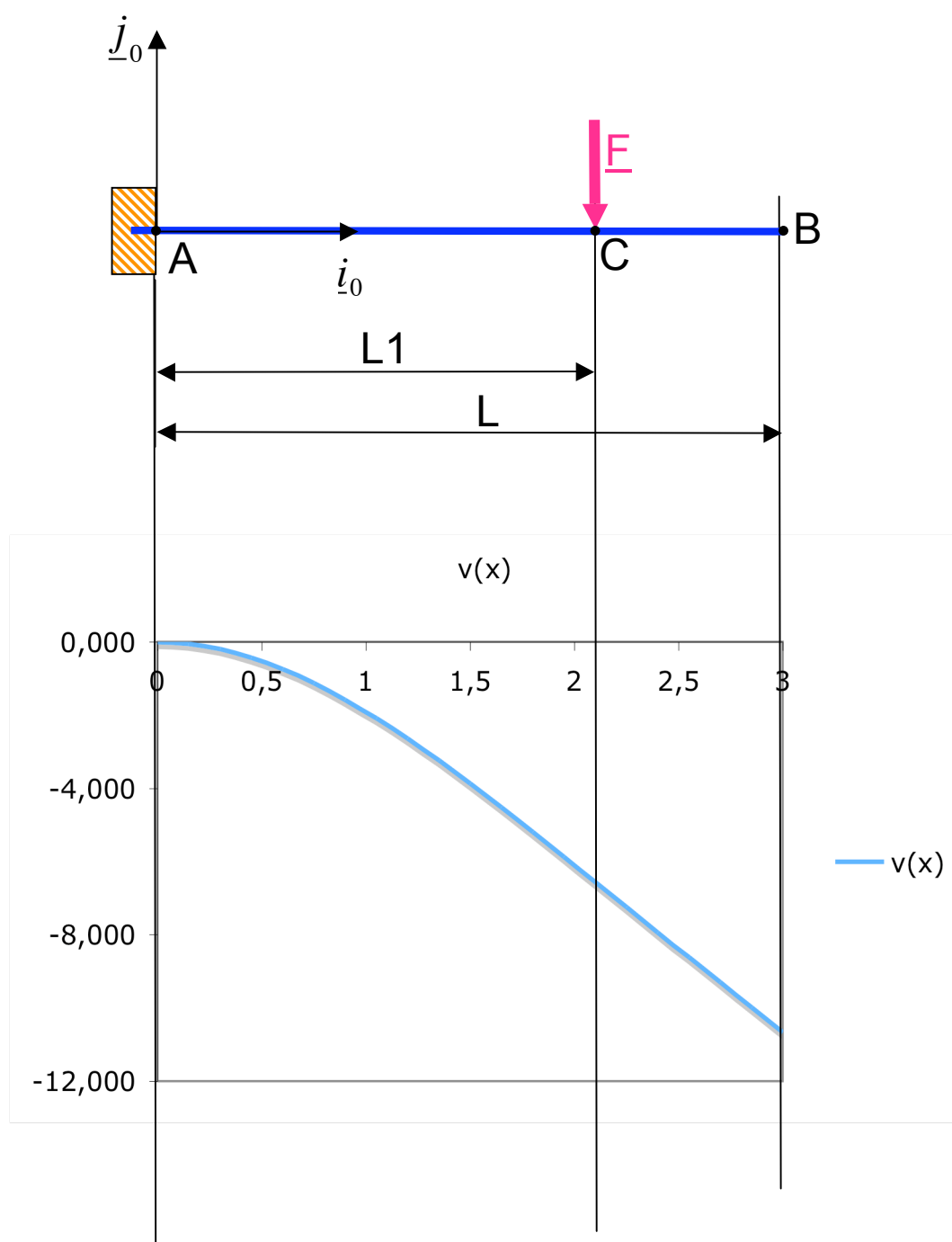
et

$$C_4 = \frac{FL^3}{6}$$

L'expression de la déformée de la ligne moyenne est donc :

$$v(x) = \frac{FL_1^2}{6EI_{GZ}} (L_1 - 3x)$$

## Évolution de la ligne moyenne déformée

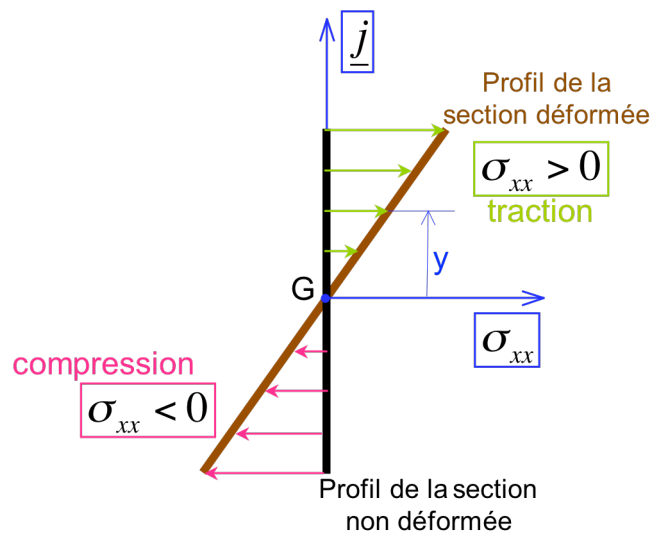


#### IV. CONTRAINTE NORMALE DANS LA SECTION DROITE

Cette évolution est donnée par la relation :

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_z}{I_{GZ}} \cdot y$$

Dans l'intervalle [A,C], le moment fléchissant est négatif et l'évolution est la suivante :





### Exercice 3

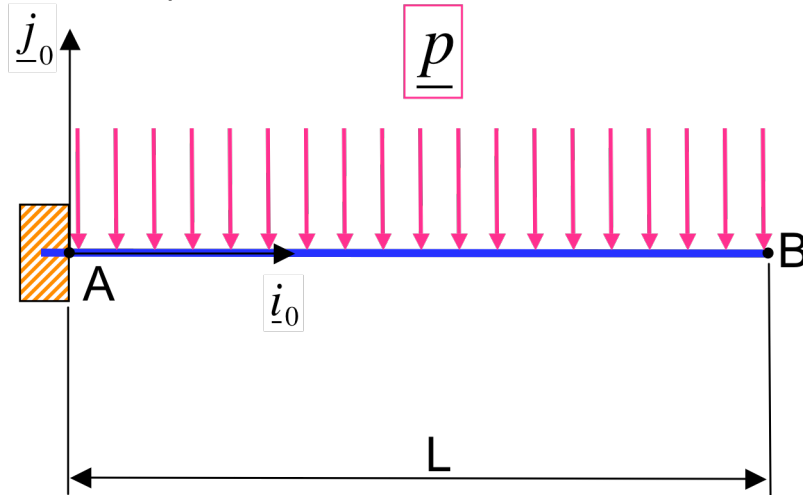
Mêmes questions que pour l'exercice 1

Pour l'application numérique, on donne :

$L=2\text{m}$

$\underline{p} = -1000 \underline{j}_0$  en  $\text{N.m}^{-1}$  : densité linéique de charge.

Liaison encastrement au point A.

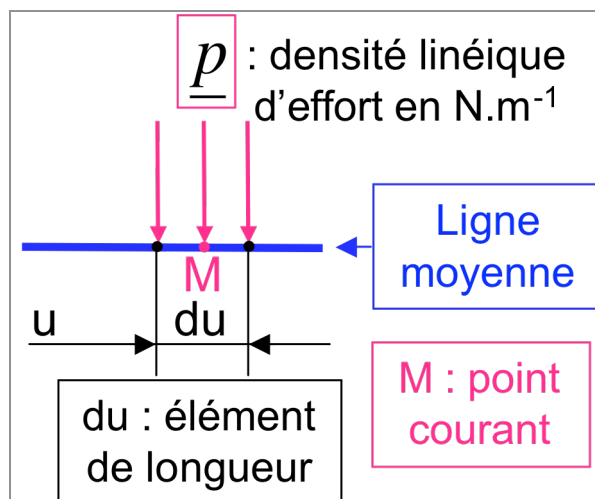


Remarque : le plan  $(\underline{i}_0, \underline{j}_0)$  est un plan de symétrie qui contient la ligne moyenne. C'est un plan moyen pour la poutre.

## DETERMINATION DES EFFORTS EXTERIEURS

### 1. Chargement (donnée du problème)

Un seul chargement du type **réparti** (ici c'est une densité linéique d'effort en  $\text{N.m}^{-1}$ ) est appliqué au point courant M (voir figure ci-dessous).



Le torseur associé à ce chargement est :

$$d\tau_M = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(d\tau_M) = \begin{vmatrix} 0 \\ -p \cdot du \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(d\tau_M, M) = \underline{0} \end{array} \right\}_{(A: \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$



Il est intéressant à ce stade de penser à exprimer ce torseur en un point où l'on souhaite appliquer le principe fondamental de la statique. Nous choisissons par exemple le point A. Le torseur de chargement au point C s'exprime au point de réduction A de la façon suivante :

$$d\tau_M = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(d\tau_M) = \begin{vmatrix} 0 \\ -p \cdot du \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(d\tau_M, A) = \underline{M}(d\tau_M, M) + \underline{AM} \wedge \underline{R}(d\tau_M) \end{array} \right\}_{(A: \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

$$d\tau_M = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(d\tau_M) = \begin{vmatrix} 0 \\ -p \cdot du \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(d\tau_M, A) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -p \cdot u \cdot du \end{vmatrix} \end{array} \right\}_{(A: \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

## 2. Réactions des liaisons (inconnues du problème)

➤ Torseur des efforts extérieurs associé à la liaison **encastrement au point A**

Cette liaison **supprime les 6 degrés de liberté dans l'espace (les 3 translations et les 3 rotations)**. Elle introduit donc **6 inconnues (3 forces et 3 moments)**. Dans le cas d'une **poutre à plan moyen chargée dans son plan**, le torseur associé à cette liaison au point de réduction A est:

$$\tau_A = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_A) = \begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_A, A) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ Z_A \end{vmatrix} \end{array} \right\}_{(A: \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

## 3. Application du principe fondamental de la statique et détermination des réactions des liaisons

**Remarque :** Il faut d'abord exprimer tous les torseurs en un même point de réduction. Ce travail a été fait précédemment.

$$\{\tau_{\text{efforts extérieurs}}\} = \{0\}$$

$$\tau_A + \int_A^B d\tau_M = \{0\} \Rightarrow \begin{cases} \underline{R}(\tau_A) + \int_A^B \underline{R}(d\tau_M) = \underline{0} & (1) \\ \underline{M}(\tau_A, A) + \int_A^B \underline{M}(d\tau_M, A) = \underline{0} & (2) \end{cases}$$

La projection des équations (1) et (2) selon les 3 axes du repère de référence conduit à 3 équations scalaires « utiles » (2 équations en force selon  $\underline{j}_0$  et selon  $\underline{i}_0$  et 1 équation en moment selon  $\underline{k}_0$ ).

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{c} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{array} \right) + \int_0^L \left( \begin{array}{c} 0 \\ -p \\ 0 \end{array} \right) du = \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ Z_A \end{array} \right) + \int_0^L \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -p.u \end{array} \right) du = \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \end{array} \right. \quad (2)$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{l} X_A = 0 \\ Y_A = p[u]_0^L \\ Z_A = p\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^L \end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{l} X_A = 0 \\ Y_A = pL \quad ; \text{ en N} \\ Z_A = p\frac{L^2}{2} \quad ; \text{ en N.m} \end{array}$$

Ce qui conduit à :

$$\tau_A = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_A) = \left| \begin{array}{c} 0 \\ pL \\ 0 \end{array} \right| \\ \underline{M}(\tau_A, A) = \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ p\frac{L^2}{2} \end{array} \right| \end{array} \right\}_{(A; \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

Application numérique :

La réactions de liaison encastrement :

$$\tau_A = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_A) = \left| \begin{array}{c} 0 \\ 2000 \\ 0 \end{array} \right| \text{ en N} \\ \underline{M}(\tau_A, A) = \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 2000 \end{array} \right| \text{ en N.m} \end{array} \right\}_{(A; \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

Le chargement :

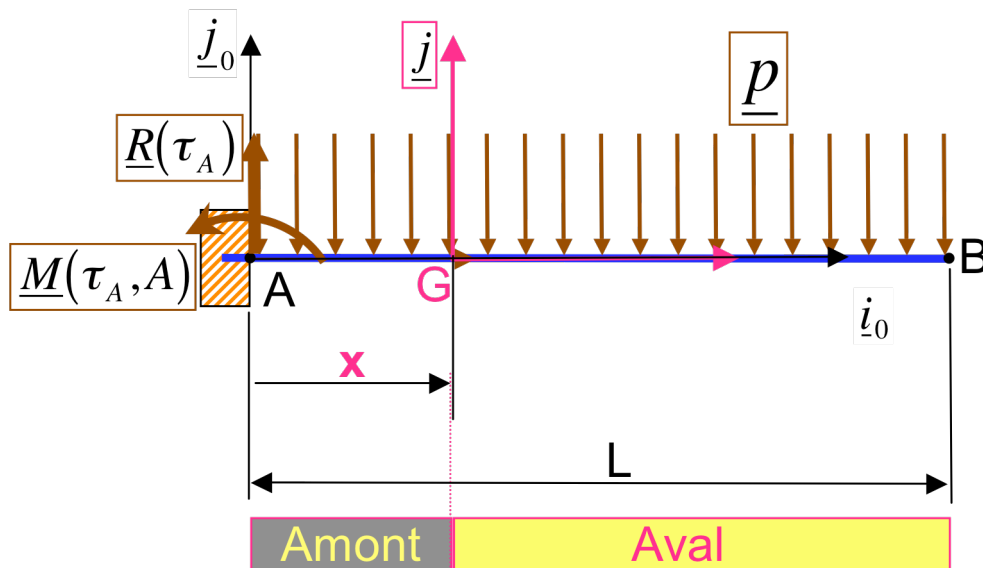
$$d\tau_M = \left\{ \begin{array}{c} R(\tau_M) = \begin{vmatrix} 0 \\ -1000 \cdot du \\ 0 \end{vmatrix} \\ M(d\tau_M, A) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -1000 \cdot u \cdot du \end{vmatrix} \end{array} \right\}_{(A; \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

#### 4. Isostaticité extérieure

Le **système est isostatique** extérieurement car nous avons déterminé toutes les réactions (3 inconnues : deux force et un moment) des liaisons par les seules équations d'équilibre (3 équations scalaires). Soient : 3 équations pour 3 inconnue.

## II. DETERMINATION DES EFFORTS INTERIEURS

Une **seule coupe** fictive (entre les points A et B) est nécessaire pour déterminer l'**expression** du torseur des efforts intérieurs.



On a :

$$\tau_i = -\tau_{\text{amont}} = +\tau_{\text{aval}}$$

On choisi :

$$\tau_i = \tau_{\text{aval}} = \int_G^B d\tau_M$$

car il n'y a que le torseur de chargement réparti à droite du point G,

La résultante est :

$$R(\tau_i) = \int_x^L R(d\tau_M) = \int_x^L \begin{vmatrix} 0 \\ -p \cdot du \\ 0 \end{vmatrix}_R = \begin{vmatrix} 0 \\ -p \cdot (L-x) \\ 0 \end{vmatrix}$$

On remarque que :

$$N=0 :$$

$$T_y = -p(L-x) :$$

$$T_z=0 :$$

effort normal

**effort tranchant selon  $\underline{j}$  en N en SI**

effort tranchant selon  $\underline{k}$

Le moment résultant est donné par :

$$\underline{M}(\tau_i, G) = \int_x^L \underline{M}(d\tau_i, G) = \int_x^L \underline{GM} \wedge \underline{R}(d\tau_M) = \int_x^L \begin{vmatrix} u-x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -p \cdot du \\ 0 \end{vmatrix} = \int_x^L \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -p \cdot (u-x) \cdot du \end{vmatrix}_R$$

Soit

$$\underline{M}(\tau_i, G) = \left[ \frac{-p \cdot (u-x)^2}{2} \right]_x^L = \frac{-p \cdot (L-x)^2}{2}$$

d'où

$M_x=0$  :

Moment de torsion

$M_y=0$  :

moment de flexion selon  $\underline{j}$

$M_z = -(1/2)p(L-x)^2$  : **moment de flexion selon  $\underline{k}$  en N.m en SI**

$$\tau_i = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_i) = \begin{vmatrix} 0 \\ -p(L-x) \\ 0 \end{vmatrix} = T_y : \text{effort tranchant selon } \underline{j} \\ \underline{M}(\tau_i, G) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -p(L-x)^2/2 \end{vmatrix} = M_z : \text{moment de flexion selon } \underline{k} \end{array} \right\}_{(G; \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})}$$

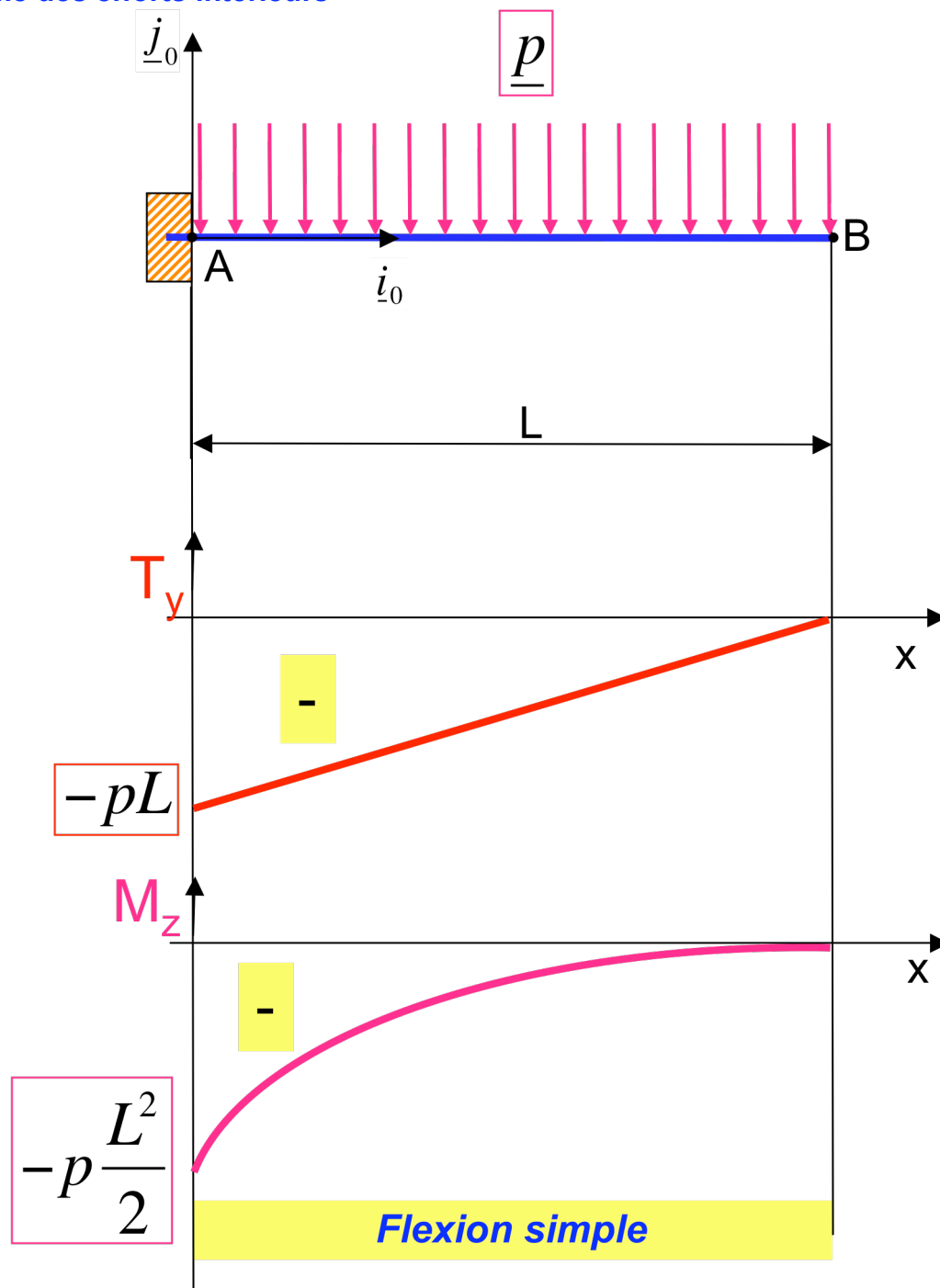
La poutre est soumise à une **sollicitation de flexion simple** (1 effort tranchant + 1 moment fléchissant).

On peut remarquer que l'équation d'équilibre :  $\frac{dM_z}{dx} + T_y = 0$  est vérifiée.

En effet,

$$\frac{d(-p(L-x)^2/2)}{dx} - p(L-x) = \frac{2p(L-x)}{2} - p(L-x) = 0$$

### 3. Diagramme des efforts intérieurs



### III. DETERMINATION DE LA DEFORMEE

L'équation de ligne moyenne déformée est obtenue en intégrant l'équation suivante :

$$EI_{GZ} \frac{d^2 v}{dx^2} = M_z(x)$$

Nous avons une seule expression du torseur des efforts intérieurs, nous avons donc une seule équation de la déformée à déterminer pour toute la poutre

$$EI_{GZ} \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{p}{2}(L - x^2)$$

On intègre une première fois,

$$EI_{GZ} \frac{dv}{dx} = -\frac{p}{2}x \left( L - \frac{x^2}{3} \right) + C_1$$

et une deuxième fois,

$$EI_{GZ} v(x) = -\frac{p}{2}x^2 \left( \frac{L}{2} - \frac{x^2}{12} \right) + C_1 x + C_2$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes,

Nous écrivons les conditions aux limites pour les déterminer. En effet, en A la liaison est un encastrement. Cette dernière supprime les 6 degrés de liberté (3 translations et 3 rotations) dans l'espace. En particulier, le déplacement selon  $j$  ainsi que la rotation selon  $k$  sont supprimés. Nous traduisons donc ces deux dernières informations en équations :

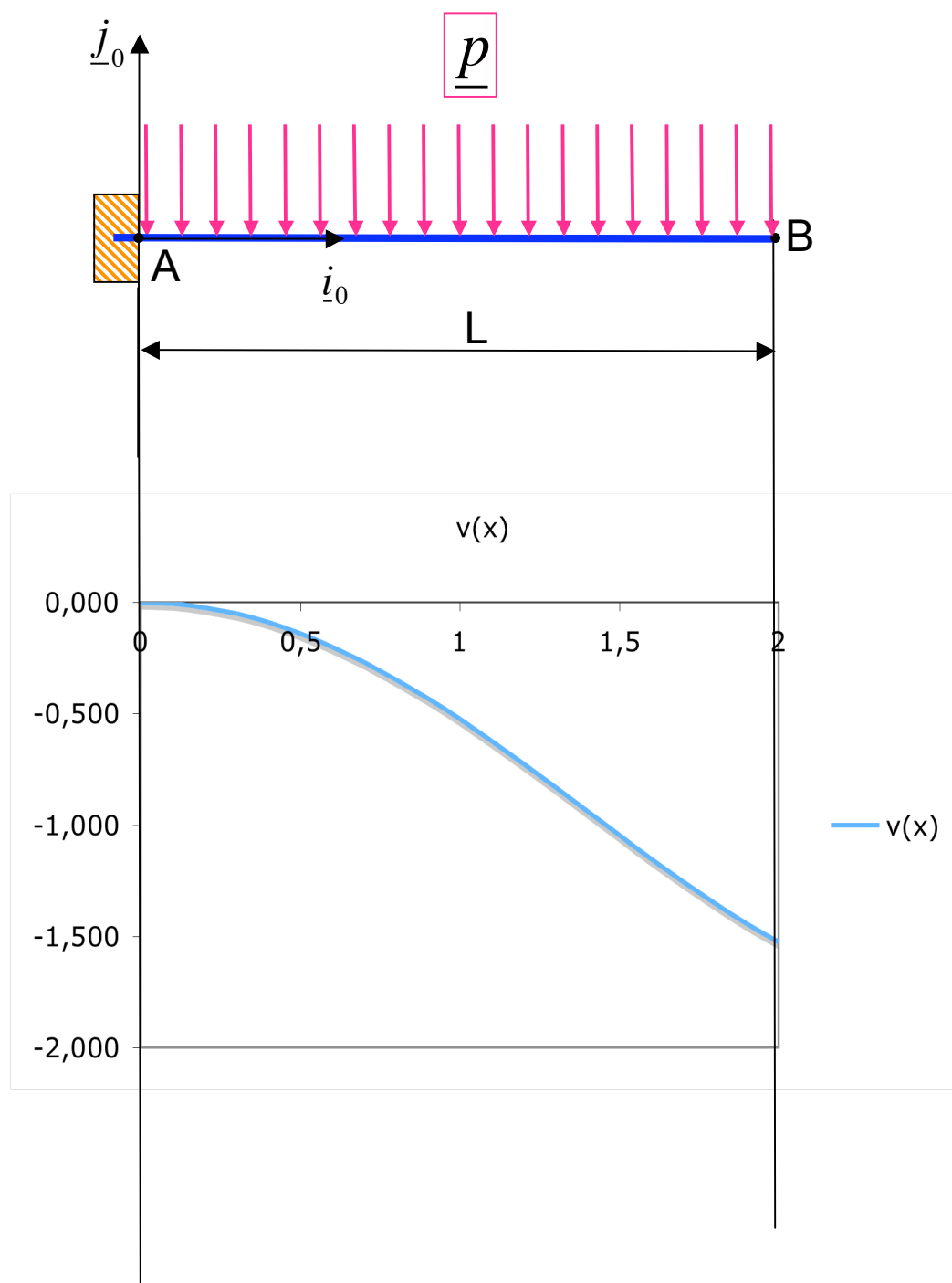
$$\text{En A le déplacement selon } j \text{ est nul} \Rightarrow v(x=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\text{En A la rotation autour de } k \text{ est nulle} \Rightarrow \frac{dv(x=0)}{dx} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

L'équation de ligne moyenne déformée est donc :

$$v(x) = -\frac{p}{24EI_{GZ}}x^2(6L - x^2)$$

## Évolution de la ligne moyenne déformée



#### IV. CONTRAINTE NORMALE DANS LA SECTION DROITE

Cette évolution est donnée par la relation :

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_z}{I_{GZ}} \cdot y$$

Dans l'intervalle [A,C], le moment fléchissant est négatif et l'évolution est la suivante :

